# Полтавська область 2017-2018
# Умови. Вказівки. Відповіді. Розв'язання
## Секції: техніки

## 9 клас

*I рівень*

1. Розв'язати нерівність $|x+1|>|x-1|$.

**Розв'язання.**

1. $|x+1|>|x-1| \Leftrightarrow |x+1|^2>|x-1|^2 \Leftrightarrow 2x>-2x \Leftrightarrow x>0.$ Відповідь: $x\in(0;+\infty)$.

2. Порівняти числа $\sqrt{1+\sqrt{11}}$ та $\sqrt{5}$ .

**Розв'язання.**

2. $\sqrt{1+\sqrt{11}}\,?\,\sqrt{5} \Leftrightarrow 1+\sqrt{11}\,?\,5 \Leftrightarrow \sqrt{11}\,?\,4 \Leftrightarrow 11?16.$ Очевидно $\sqrt{1+\sqrt{11}}<\sqrt{5}.$

3. Знайти довжину меншої з діагоналей ромба, якщо його сторона дорівнює $\sqrt{2}$, а площа дорівнює $\sqrt{3}.$

**Розв'язання.**

3. Нехай $\alpha$ – гострий кут ромба, тоді $S=\sqrt{3}, S=\left(\sqrt{2}\right)^2\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha=60^\circ \Rightarrow$ менша діагональ дорівнює $\sqrt{2}$ .

*II рівень*

4. У прямокутному трикутнику $ABC\left(\angle C=90^\circ, \angle B=60^\circ\right)$ висота $CH$ перетинає бісектрису $BK$ в точці $O$. Довести, що точка $O$ є серединою бісектриси $BK$.

**Розв'язання.**

4. $\angle BCH=30^\circ, \angle CBK=\angle ABK=30^\circ \Rightarrow OC=OB.$ Але $\Delta COK$ – рівносторонній $\left(\angle OKC=\angle COK=\angle CKO=60^\circ\right) \Rightarrow CO=KO \Rightarrow BO=OK.$

5. При яких значеннях параметра $a$ система рівнянь $\begin{cases} x+ay=a, \\ ax+y=1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

**Розв'язання.**

5. $\begin{cases} x+ay=a, \\ ax+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+a(1-ax)=a, \\ y=1-ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-ax, \\ \left(a^2-1\right)x=0. \end{cases}$ Якщо $a\neq\pm1,$ то система має єдиний розв'язок $x=0, y=1.$ Якщо ж $a=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=1, \\ x+y=1 \end{cases}$ – безліч розв'язків, $a=-1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=-1, \\ -x+y=1 \end{cases}$ – безліч розв'язків. Відповідь: $a\neq\pm1.$

*III рівень*

6. Довести нерівність $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\geq\frac{4}{2+x+y}$, де $x,y\geq 0.$

**Розв'язання.**

6.

$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}\geq\frac{4}{2+x+y}\Leftrightarrow(1+y)(2+x+y)+(1+x)(2+x+y)\geq 4(1+x)(1+y)\Leftrightarrow$

$\left(2+x+y+2y+xy+y^2\right)+\left(2+x+y+2x+xy+x^2\right)\geq 4+4x+4y+4xy\Leftrightarrow(x-y)^2\geq 0$ – істинне.

7. Знайти всі набори простих чисел $p,q,$ таких, що число $p^2+q^2$ ділиться на 3.

**Розв'язання.**

7. Легко показати, що квадрат цілого числа при діленні на 3 може давати остачу 0 або 1, тому сума двох квадратів цілих чесел ділиться на 3 лише тоді, коли обидва числа діляться на 3 (достатньо перебрати всі можливі випадки). Внаслідок простоти заданих чисел маємо $p=q=3.$

# 10 клас

*I рівень*

1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\geq 1.$

**Розв'язання.**

1. ОДЗ: $x\geq 0.$ Але тоді $\sqrt{x}\geq 0,\sqrt{1+x}\geq 1\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\geq 1.$ Відповідь: $x\in[0;+\infty).$

2. Знайти множину значень функції $y=17-18|x|-x^2.$

**Розв'язання.**

2. $y=17-18|x|-x^2=98-(|x|+9)^2.$ Але вираз $|x|+9$ може набувати будь-яке значення з інтервалу $[9;+\infty),$ тому множиною значень заданої функції є $(-\infty;17].$

3. У рівнобічну трапецію вписано коло радіуса 1. Знайти площу трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 4.

**Розв'язання.**

3. Суми протилежних сторін описаного чотирикутника рівні, тому півсума основ дорівнює 4. Висота трапеції, очевидно, дорівнює 2, тому площа трапеції дорівнює 8.

*II рівень*

4. У прямокутному трикутнику $ABC\left(\angle C=90^\circ\right)$ висота $CH$ перетинає бісектрису $BK$ в точці $O.$ Знайти відношення $BO:OK,$ якщо $\angle A=\alpha.$

**Розв'язання.**

4. За трьома кутами $\Delta BCK\sim\Delta BHO\Rightarrow\frac{BC}{BH}=\frac{CK}{HO}=\frac{KB}{OB}.$ Але $\frac{BH}{BC}=\sin\alpha\Rightarrow OB=KB\sin\alpha\Rightarrow$

$\frac{BO}{OK}=\frac{BO}{KB-BO}=\frac{KB\sin\alpha}{KB-KB\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}.$

5. При яких значеннях параметра $a$ система рівнянь $\begin{cases} x+ay=a, \\ ax+y=1 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

**Розв'язання.**

5. $\begin{cases} x+ay=a, \\ ax+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+a(1-ax)=a, \\ y=1-ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-ax, \\ (a^2-1)x=0. \end{cases}$ Якщо $a \neq \pm 1,$ то система має єдиний розв'язок $x=0, y=1.$ Якщо ж $a=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=1, \\ x+y=1 \end{cases}$ – безліч розв'язків, $a=-1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=-1, \\ -x+y=1 \end{cases}$ – безліч розв'язків. Відповідь: $a=\pm 1.$

*III рівень*

6. Величини кутів опуклого п'ятикутника утворюють арифметичну прогресію. Довести, що кожен з них більший ніж $36^\circ.$

**Розв'язання.**

6. Нехай $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 < 180^\circ$ – кути п'ятикутника, тоді $\frac{a_1+a_5}{2} = \frac{a_2+a_4}{2} = a_3 = 108^\circ$ (сума всіх кутів дорівнює $540^\circ$). Якщо $a_1 \leq 36^\circ \Rightarrow a_5 = 216^\circ - a_1 \geq 180^\circ$ – хибне.

7. Знайти всі набори простих чисел $p, q,$ таких, що число $p^q+1$ теж є простим.

**Розв'язання.**

7. *1 випадок*: $p=q=2 \Rightarrow p^q+1=5$ – просте. *2 випадок*: $p \neq 2 \Rightarrow p^q+1$ – парне, тому не є простим. *3 випадок*: $p=2, q\neq 2 \Rightarrow q=2n+1, n\in N \Rightarrow p^q+1=2^{2n+1}+1=2\cdot 4^n+1$ ділиться на 3, тому не є простим. Відповідь: $p=q=2.$

# 11 клас

*I рівень*

1. Розв'язати рівняння $\log_2(x-6)+\log_{0,5}x=2.$

**Розв'язання.**

1. ОДЗ: $x>6.$ Тоді $\log_2(x-6)-\log_2 x=2 \Rightarrow \log_2\frac{x-6}{x}=2 \Rightarrow \frac{x-6}{x}=4 \Rightarrow x=-2$ – сторонній розв'язок. Відповідь: розв'язків немає.

2. Порівняти числа $\log_2 5$ та $2{,}5.$

**Розв'язання.**

2. $\log_2 5 ? 2{,}5 \Leftrightarrow \log_2 5 ? \log_2 2^{2.5} \Leftrightarrow 5 ? 2^{2.5} \Leftrightarrow 25 ? 32.$ Маємо $\log_2 5 < 2{,}5.$

3. Відношення радіусів двох куль дорівнює $p:q.$ Знайти відношення їх об'ємів.

**Розв'язання.**

3. $V_1:V_2=\left(\frac{4}{3}\pi r_1^3\right):\left(\frac{4}{3}\pi r_2^3\right)=r_1^3:r_2^3=p^3:q^3.$

*II рівень*

4. Знайти гострі кути прямокутного трикутника, у якого відношення суми катетів до гіпотенузи дорівнює $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

**Розв'язання.**

Нехай $x \le 45^\circ$ – менший з гострих кутів трикутника, $c$ – його гіпотенуза. Тоді $\frac{c\cos x + c\sin x}{c} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2x = 60^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ.$

Відповідь: $30^\circ, 60^\circ$.

5. При яких значеннях параметра $a$ система рівнянь $\begin{cases} ax + y + z = 0, \\ x + ay + z = 0, \\ x + y + az = 0 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

**Розв'язання.**

5. Очевидно, що при $a = 1$ система рівнянь має безліч розв'язків. Нехай $a \ne 1$. Віднімемо від другого рівняння перше, а від третього – друге. Одержимо $(1-a)x + (a-1)y = 0, (1-a)y + (a-1)z = 0 \Rightarrow x = y = z.$ Підставимо в перше рівняння системи: $(a+2)x = 0.$ При $a = -2$ система має безліч розв'язків, при $a \ne -2$ система має єдиний розв'язок. Відповідь: $a = 1, a = -2.$

*III рівень*

6. Знайти найбільше значення функції $y = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}.$

**Розв'язання.**

6. Область визначення функції $x \in [1; +\infty).$ Виконаємо перетворення $y = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right) - \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} =$

$= \frac{2}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)}.$ Функція монотонно спадає, тому найбільше її значення дорівнює $y(1) = 2 - \sqrt{2}$ .

7. Розв'язати рівняння $p^2 + (p+1)^2 = q^2,$ де $p, q$ – прості числа

**Розв'язання.**

7. З умови $p^2 = q^2 - (p+1)^2 = (q-p-1)(q+p+1).$ Внаслідок простоти числа $p$ одержимо $1 = q - p - 1, p^2 = q + p + 1 \Rightarrow q = p + 2, p^2 = 2p + 3 \Rightarrow p = 3, q = 5.$